Tentamen Metrische Ruimten
14 april 2009, 09:00 - 12:00 uur, 5111.0022

De vragen mogen zowel in het Nederlands als in het Engels beantwoord worden.

1. (a) Beschouw de topologische ruimte H die is gegeven door de deelruimte $[0,1)$ van $\mathbb{R}$ met de deelruimte topologie. Bepaal de afsluiting van de volgende deelverzamelingen van H en verder of ze open zijn in H, gesloten zijn in H, compact en compleet.
   i. $[0,1/2]$,
   ii. $[0,1/2)$,
   iii. $(1/2,1)$,
   iv. $[1/2,1)$.

   (b) Beschouw de afbeelding $p : \mathbb{R} \to [0,1)$ gedefinieerd door

$$p(x) = x - [x],$$

   waar $[x]$ de geheel deel van x is, en beschouw de topologische ruimte Q die is gegeven door de verzameling $[0,1)$ met de topologie τ gedefinieerd door

$$\tau = \{U \subset [0,1) : p^{-1}(U) \text{ is open in } \mathbb{R}\}.$$

   Laat zien dat H in (a) en Q niet topologisch equivalent zijn.

2. Beschouw de functie $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2|, & \text{als } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2|, & \text{als } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

   Laat zien dat d een metriek is op $\mathbb{R}^2$. Schets de open bollen $B_1((2,0))$, $B_1((1,2))$ en $B_2((1,1))$.

3. Beschouw de rij $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ van uniform continue functies die convergeren naar de functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ in de metriek d_∞ gegeven door

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

   Laat zien dat f uniform continu is.

4. Laat M een metrische ruimte zijn en H een deelverzameling van M. Als $f : M \to \mathbb{R}$ en $g : M \to \mathbb{R}$ continue functies zijn zodat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in H$, laat zien dat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in Cl(H)$.

Engels 2.02.